1.5.1 Flächensatz zur Zentralbewegung

*****

1 Motivation

Darstellung des Flächensatzes (2. Keplersches Gesetz).

```
Der Fahrstrahl des Planeten überstreicht in
gleichen Zeiten gleiche Flächen[1].
```

2 Theorie

Geometrische Interpretation der Drehimpulserhaltung:

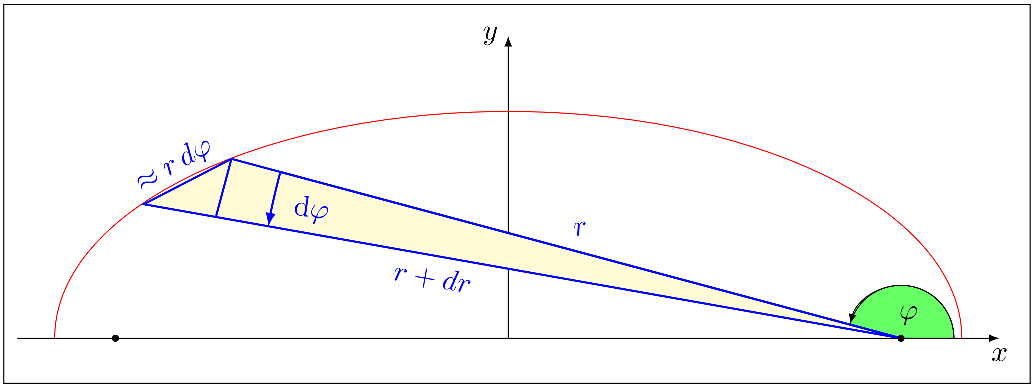

Abbildung 1: Flächengesetz: Vom Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ in der Zeit $\mathrm{d}t$ überstrichene Fläche $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$.

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes in der xy-Ebene (siehe Abb. 1). In der Zeit $\mathrm{d}t$ ändert sich der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ um die Strecke $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$. Dabei überstreicht der Ortsvektor die Fläche

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{A} &= \tfrac{1}{2}\left\{\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r})\right\} && (1)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}\right) = \tfrac{1}{2}\left\{\boldsymbol{r} \times \left(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\perp + \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\parallel\right)\right\} && (2)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\perp\right) && (3) \end{aligned}$$

Die **Flächengeschwindigkeit** ist deshalb

$$\dot{\mathbf{A}} = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}\right) = \tfrac{1}{2m}\left(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}\right) \tag{4}$$

Mit $\boldsymbol{L} = m\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$ folgt:

$$\boxed{\dot{\mathbf{A}} = \frac{\boldsymbol{L}}{2m}} \tag{5}$$

Bei konstantem Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ folgt, dass $\dot{\mathbf{A}} = \mathit{konst.}$, das heisst, in gleichen Zeiten werden gleiche Flächen überstrichen!

3 Experiment

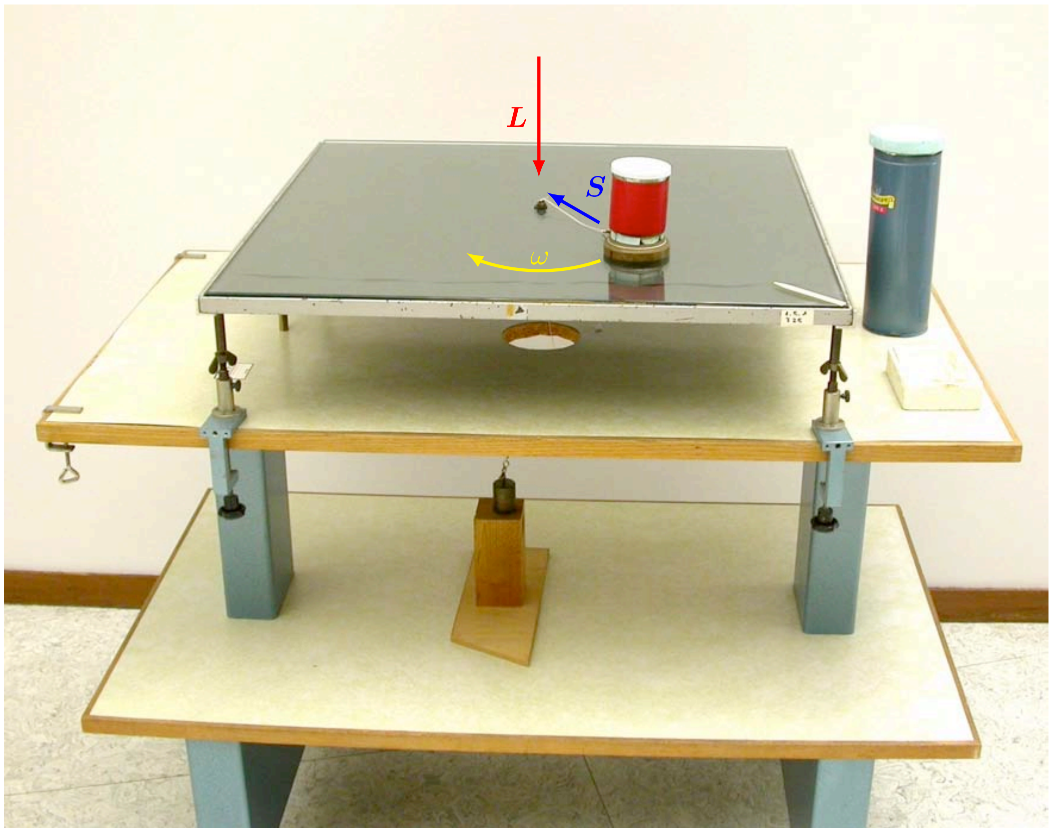

Abbildung 2: Flächensatz zur Zentralbewegung

Im Experiment setzt man eine mit flüssigem Stickstoff gefüllte Büchse durch einen kurzen Stoss in eine Kreisbewegung (siehe Abb. 2). Der verdampfende Stickstoff erzeugt ein Luftkissen, so dass die Reibung auf der Glasplattenunterlage klein wird. Eine durch die Mitte der Glasplatte nach unten verlaufende Schnur sorgt für die Einhaltung der Kreisbahn.

`Hinweis: Die mit Stickstoff gefüllte Dose sollte nie ruhend auf der Glasplatte abgestellt werden, da sie sonst auf der Unterlage anfrieren würde.`

Durcnh den Kraftstoss $\boldsymbol{F}\Delta t$ wird ein Impuls $\boldsymbol{p}$ auf die Büchse übertragen.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\Delta t \tag{6}$$

De Büchse kreist im Abstand r um den Mittelpunkt. Der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ beträgt damit

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{7}$$

und steht senkrecht auf der Kreisbahn. Die Bahngeschwindigkeit v beträgt

$$v = \frac{L}{mr}\,, \tag{8}$$

wobei m die als konstant angenommene Masse der gefüllten Büchse ist.

Für einen Umlauf benötigt die Dose die Zeit T:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{mr^2}{L} \quad \Rightarrow \quad \dot{A} = \frac{\pi r^2}{T} = \frac{L}{2m} \tag{9}$$

Zur Erhöhung der Messgenauigkeit misst man 5 Umläufe.

Anschliessend verkleinert man, bei weiterhin kreisender Büchse, den Kreisradius durch Absenken der Schnur mit einem Gewicht (siehe Abb. 3) um den Faktor $\sqrt{2}$.

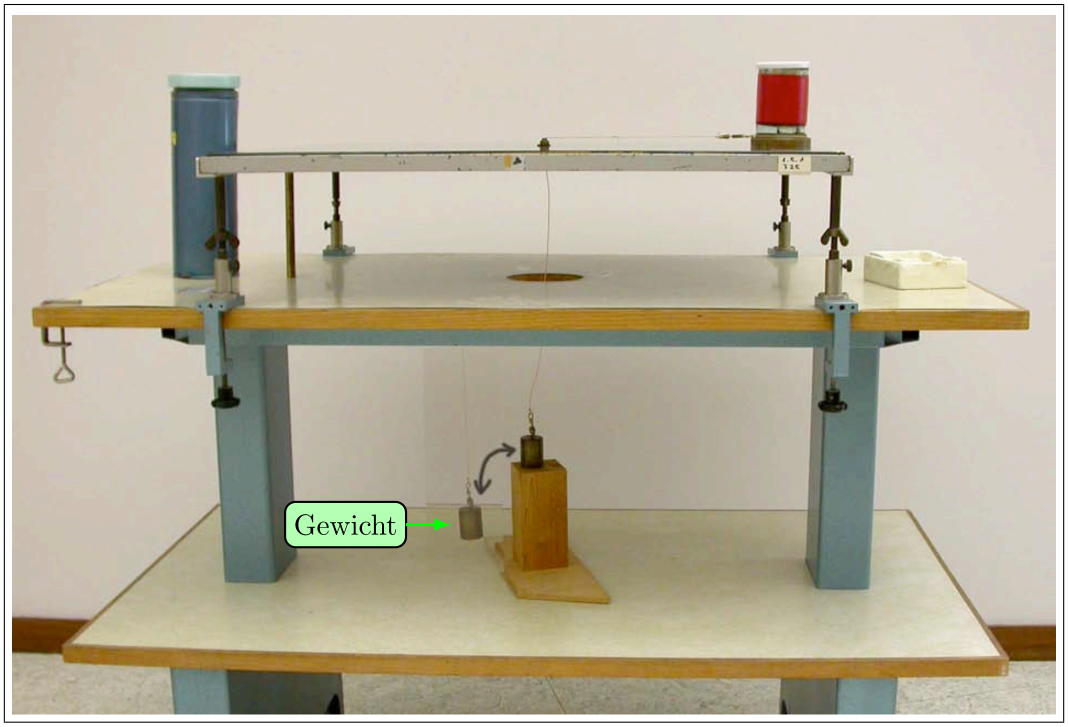

Abbildung 3: Flächensatz zur Zentralbewegung: Verkleinerung des Kreisdurchmessers durch Absenken der Schnur mit einem Gewicht.

Da dabei beim Ziehen an der Schnur die Zugkraft und der Radiusvektor parallel sind, wird kein Drehmoment ausgeübt, so dass der Drehimpuls erhalten bleibt. Die Umlaufzeit beträgt nun mit $r' = r/2$:

$$T' = \frac{1}{2} 2\pi \frac{mr^2}{L} = \frac{1}{2} T \quad \Rightarrow \quad \dot{A} = \frac{\pi r^2/2}{T/2} = \frac{L}{2m} \tag{10}$$

In anderen Worten: Da sich die Fläche halbiert hat, halbiert sich auch die Umlaufzeit!

Die Rotationsenergie E beträgt zu Beginn:

$$E = \frac{m}{2} v^2 = \frac{L^2}{2mr^2} \tag{11}$$

Beim Verkleinern des Radius verdoppelt sich die Energie:

$$E' = \frac{L^2}{mr^2} = 2E \tag{12}$$

Diese zusätzliche Energie wird durch das Ziehen am Faden in das System gebracht.